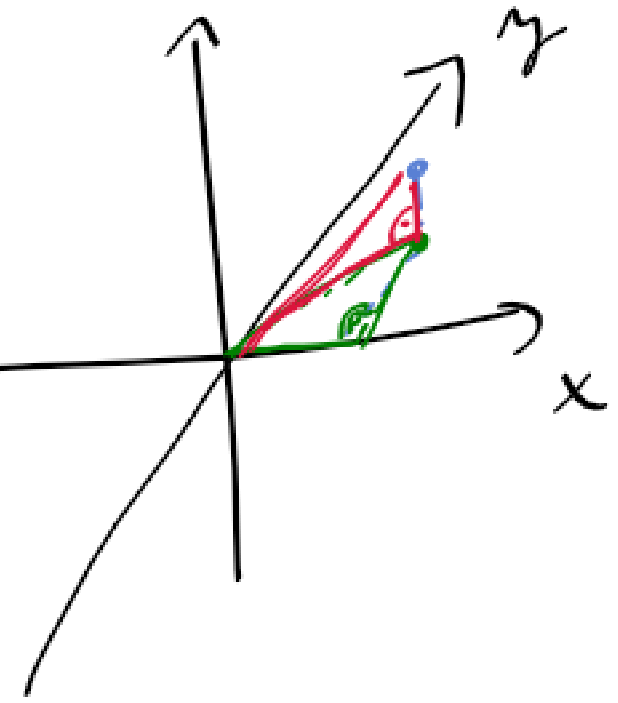
Analytická geometrie v $\mathbb{R}^3$

- Pro body $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$

  $d(x,y) = \left((x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2\right)^{1/2}$

  vzdálenost bodů x, y (Pythagorova V.)



- vektory vs. body

  trojice $\mathbb{R}$-čísel; kosmetický rozdíl.

- x, y jako výše:

$$x \cdot y = \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

$$x \times y = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} =$$

$[e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)]$

$$e_1 \cdot \det\begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix} - e_2 \cdot \det\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{pmatrix} + e_3 \cdot \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 - (x_1y_3 - x_3y_1)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3 =$$

$$= (x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1) \in \mathbb{R}^3.$$

$x \times y = -(y \times x)$

$x \times y \perp x \ \wedge\ x \times y \perp y$, kde

$u \perp v$ značí kolmost vektorů, tj.

$$\langle u, v\rangle = 0.$$

Platí: $\langle u, v\rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\alpha$, kde

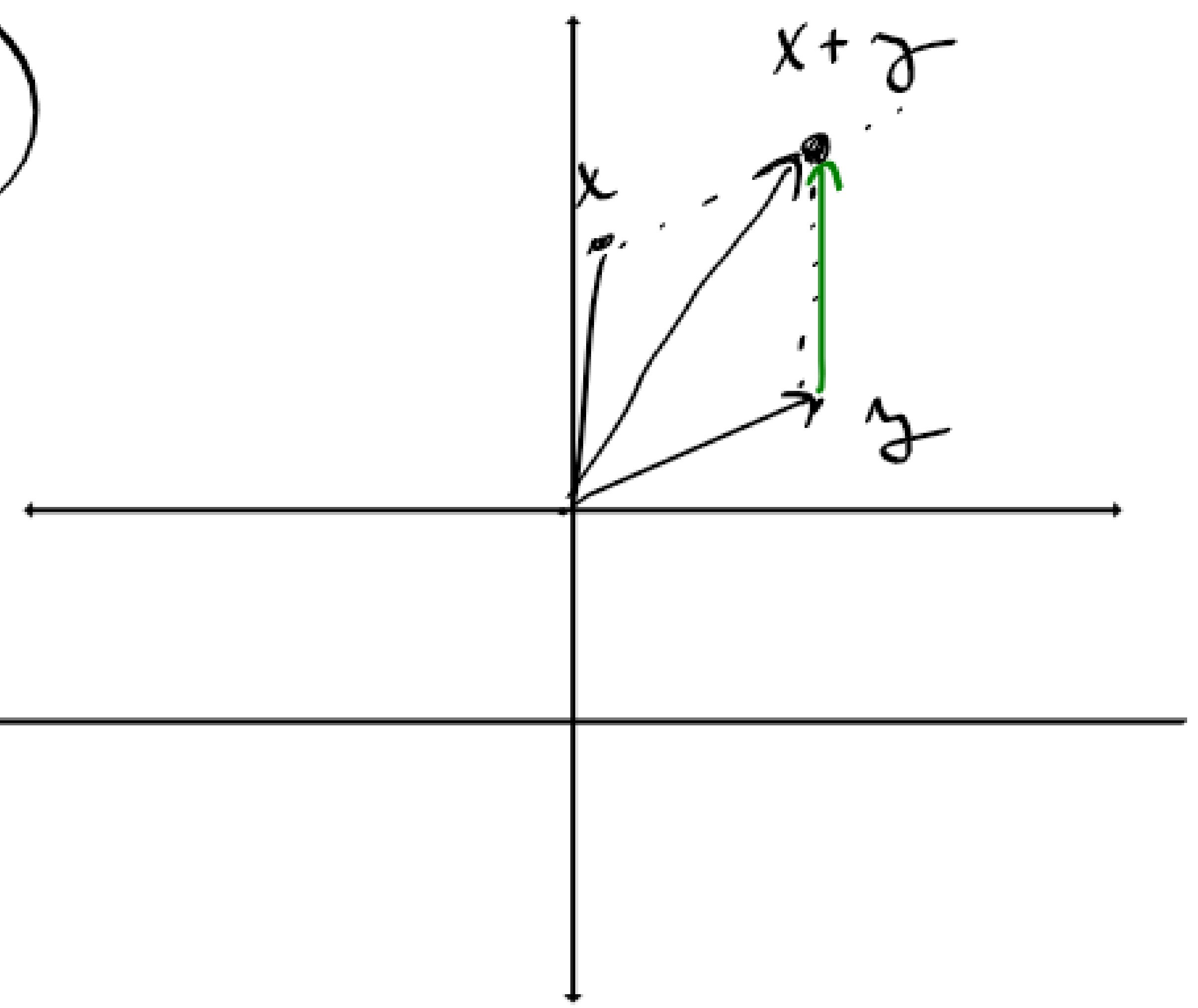
α je úhel mezi u, v a

$\|u\| = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2}$. $\|u\| = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}$

Platí: $\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin\alpha$

Pozn.: • $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

• $\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$



Přímka v $\mathbb{R}^3$

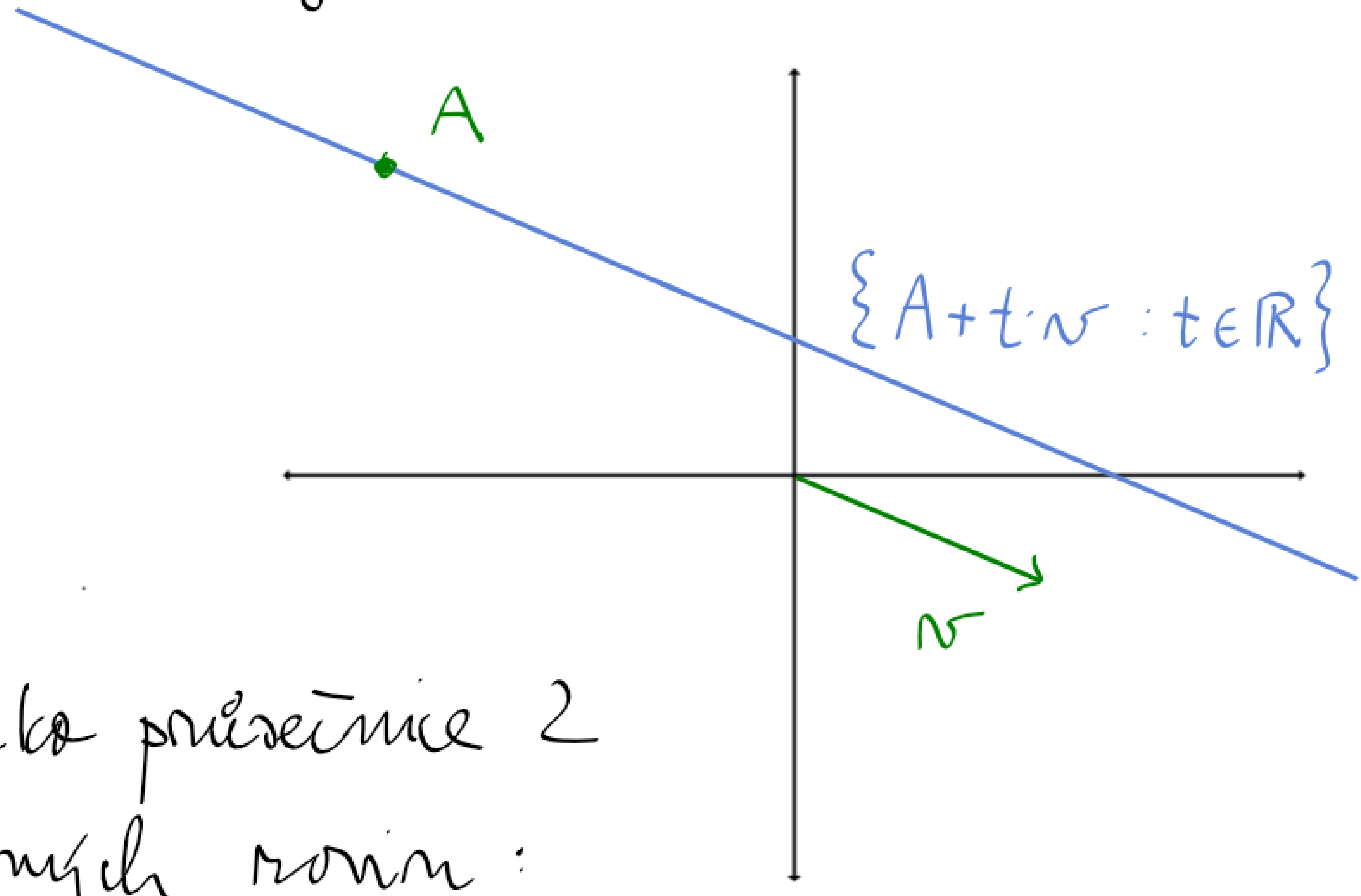
Je dána, je-li dán bod A a vektor $v \neq o$ ($A, v \in \mathbb{R}^3$): množina bodů

$$\{A + t \cdot v : t \in \mathbb{R}\} \qquad (t \dots \text{parametr})$$

$$= \{(A_1, A_2, A_3) + t \cdot (v_1, v_2, v_3) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(A_1 + tv_1, A_2 + tv_2, A_3 + tv_3) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$x = A_1 + tv_1 \qquad y = A_2 + tv_2 \qquad z = A_3 + tv_3 .$$



Přímka jako průsečnice 2 nerovnoběžných rovin:

Rovina v $\mathbb{R}^3$: implicitní vyj. tj. pomocí tzv. obecné rovnice roviny:

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$$

Je množina všech b. splňuj., tj. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz + d = 0\}$.

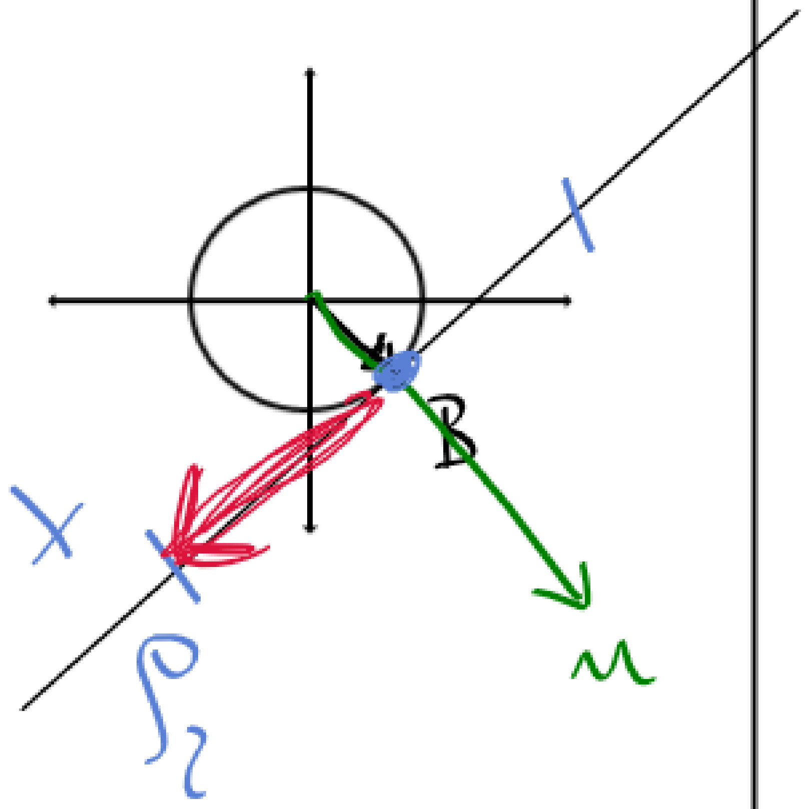
Pozorování: $\rho_1: ax + by + cz = 0$ je rovnoběžná

$\rho_2: ax + by + cz + d = 0$.

$$\rho_1 = \{\langle (a,b,c)\cdot(x,y,z)\rangle = 0\}$$

$$\rho_2 = \{\langle (a,b,c)\cdot(x,y,z)\rangle = -d\}$$

$$\|(a,b,c)\|\cdot\|(x,y,z)\|\cdot\cos\alpha = -d$$



$$u = (a,b,c) \qquad \frac{u}{\|u\|^2} = \frac{(a,b,c)}{a^2+b^2+c^2} =: \tilde{u}$$

$$\rho_2: \frac{a}{\|u\|^2}x + \frac{b}{\|u\|^2}y + \frac{c}{\|u\|^2}z + \frac{d}{\|u\|^2} = 0$$

$$\frac{a}{\|u\|^2}x + \frac{b}{\|u\|^2}y + \frac{c}{\|u\|^2}z = -\frac{d}{\|u\|^2}$$

$$B = -\frac{d}{\|u\|^2}\cdot u = -d\cdot\tilde{u} \qquad \underline{B\in\rho_2:}$$

$$B = -d\cdot\left(\frac{a}{\|u\|^2}, \frac{b}{\|u\|^2}, \frac{c}{\|u\|^2}\right)$$

$$a\cdot\frac{-da}{\|u\|^2} + b\cdot\frac{-db}{\|u\|^2} + c\,\frac{-dc}{\|u\|^2} + d =$$

$$= \frac{-d}{\|u\|^2}(a^2+b^2+c^2) + d =$$

$$= -\frac{d}{\|u\|^2}\cdot\|u\|^2 + d = -d + d = 0$$

$$\rho_2 = \{X\in\mathbb{R}^3 : \langle (X-B), u\rangle = 0\}$$

$$= \{X + B : \langle X, u\rangle = 0\}$$

$$= B + \{X : \langle X, u\rangle = 0\}$$

$$= B + \rho_1.$$

Tedy ρ_1 a ρ_2 jsou rovnoběžné roviny.

Tvrdím: $u = (a, b, c) \perp \rho_1, \rho_2$,

Dk.: $\rho_1 = \{X : \langle X, u\rangle = 0\} =$

$= \{X : X \perp u = 0\}$, tj.

$u \perp \rho_1$. Ale $\rho_1 \parallel \rho_2 \Rightarrow u \perp \rho_2$. $\boxtimes$

Explicitní (param. vyjádření roviny):

$$\rho_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 : A + s v_1 + t v_2 ;\ s, t \in \mathbb{R}\}$$

v_1, v_2 jsou LNZ vektory v $\mathbb{R}^3$.

$$= A + \underbrace{\mathrm{span}\{v_1, v_2\}}_{\text{lineární obal } v_1, v_2}.$$

Implicitní vyjádření přímky v $\mathbb{R}^3$:

průnik dvou rovin, které nejsou rovnoběžné

$\rho_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$

$\rho_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$

$\rho_1 \cap \rho_2$ je přímka $\Leftrightarrow$

$(a_1, b_1, c_1) \nparallel (a_2, b_2, c_2) \Leftrightarrow$

$\dim(\mathrm{span}\{(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)\}) = 2$.

Pozn.: $(a_1, b_1, c_1) \parallel (a_2, b_2, c_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho_1 \cap \rho_2 = \rho_1 = \rho_2 \vee \rho_1 \cap \rho_2 = \emptyset$

Příklad: Najděte příčku mimoběžek:

$p: (1,-3,5) + t\,(2,4,3)$

$q: (0,2,-5) + t\,(5,-1,2)$

a) nejkratší příčku b) proch. b. $(4,0,-1)$.

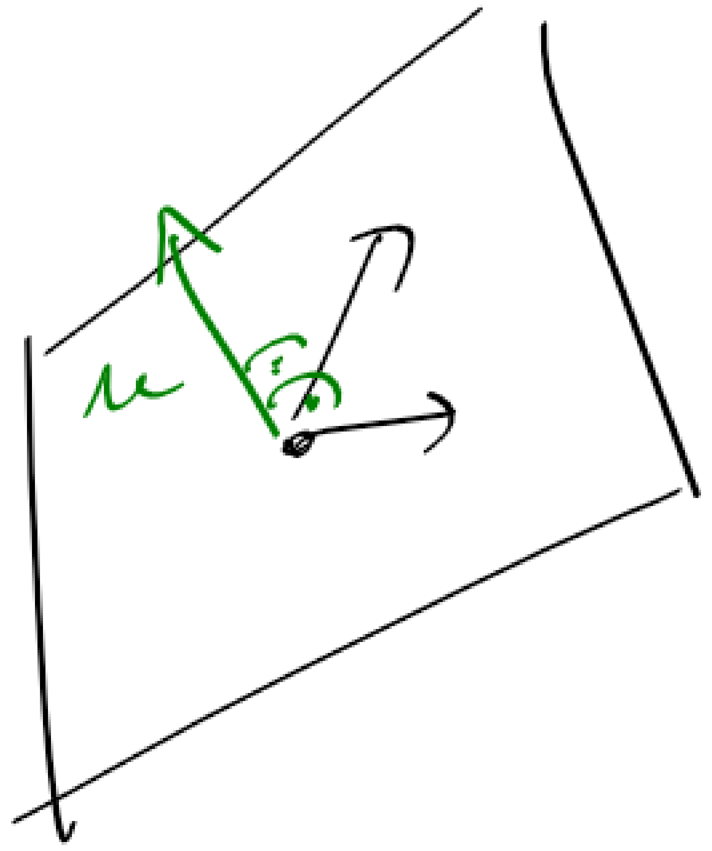
a) Chceme najít přímku $r \perp p, q$, že $r \cap p \neq \emptyset$, $r \cap q = \emptyset$.

$\rho: (0,0,0) + t\cdot(2,4,3) + s\cdot(5,-1,2)$, $t, s \in \mathbb{R}$

$\vec{u} := (2,4,3) \times (5,-1,2) =$

$$= \det \begin{pmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= (11, +11, -22) = 11\cdot(1,+1,-2)$$



Zk: $\langle (1,+1,-2), (2,4,3) \rangle = 2+4-6 = 0$

$\langle (1,1,-2), (5,-1,2) \rangle = 5-1-4 = 0$

2. ZPŮSOB: Hledáme $0 \neq u = (x,y,z)$ splňující:

$u \perp (2,4,3)$, $u \perp (5,-1,2)$ tj.

$\langle u, (2,4,3) \rangle = 0$, $\langle u, (5,-1,2) \rangle = 0$, tj.

$$2x + 4y + 3z = 0 \qquad \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim$$
$$5x - y + 2z = 0$$

$$\sim \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 22 & 0 & 11 \end{pmatrix} \quad \dots \quad z = t$$

$22x + 11t = 0 \qquad 22x = -11t \qquad x = \frac{-11}{22}t$

$5x - y + 2z = 0$

$-\frac{5}{2}t + 2t = y \qquad y = -\frac{1}{2}t$

$(x,y,z) = \left(-\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}, t\right)$

$t = -2 \dots$

$(1,1,-2)$

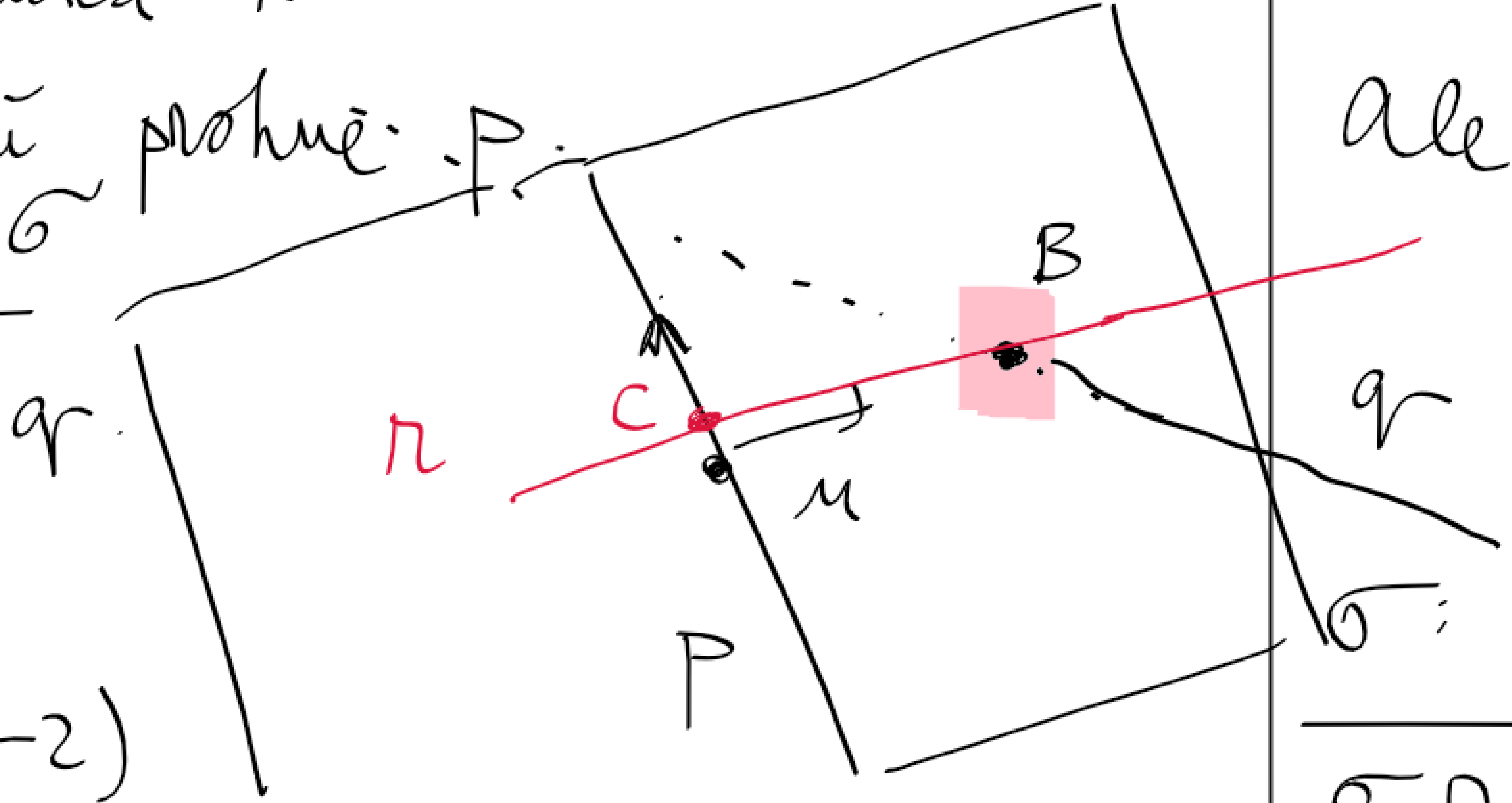
$p: (1,-3,5) + t(2,4,3)$ $\quad q: (0,2,-5) + t\cdot(5,-1,2) = (5t, 2-t, -5+2t)$

$r: A + t\cdot(1,1,-2)$. Chceme A, že $r \cap q \neq \emptyset \neq r \cap p$

Postup: $\sigma \supseteq p$, kolmá na q.

$\sigma: (1,-3,5) + s\cdot(2,4,3) + t\cdot(1,1,-2)$.

Libovolná přímka v σ je kolmá na q.
navíc tato přímka se směr. vektorem $(1,1,-2)$ zaručeně protne p.



$B = (5,1,-3) \in \sigma \cap q$

Tedy r:
$(5,1,-3) + t\cdot(1,1,-2)$

$r \cap p \ni C$

Chceme najít bod $B \in q \cap \sigma$.
najdeme obecnou rci σ a dosadíme q:

$$n = (2,4,3) \times (1,1,-2) = \det\begin{pmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11, & 7, & -2 \end{pmatrix}.$$

$\sigma: -11x + 7y - 2z + d = 0$

ale $(1,-3,5) \in \sigma \Rightarrow$

$$-11\cdot 1 + 7\cdot(-3) - 2\cdot 5 + d = 0$$
$$d = 11 + 21 + 10 = 42$$

$\sigma: -11x + 7y - 2z + 42 = 0$

$\sigma \cap q: -11\cdot 5t + 7(2-t) - 2(-5+2t) + 42 = 0$
$$-55t + 14 - 7t + 10 - 4t + 42 = 0$$
$$-66t = -66 \qquad [t = 1]$$

$p: (1,-3,5) + t\cdot(2,4,3)$

$r: (5,1,-3) + s\cdot(1,1,-2)$ $\qquad p \cap r = ?$

$p: (1+2t, -3+4t, 5+3t) =$

$r: (5+s, 1+s, -3-2s)$

$$\left.\begin{array}{l} 1+2t = 5+s \\ -3+4t = 1+s \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} -4+2t = -4 & \underline{\underline{t=0}} \\ -3 = 1+s & s=-4 \end{array}$$

$$5+3t = -3-2s \qquad 5+3\cdot 0 = -3-2(-4) \checkmark$$

$\rightarrow C = (1+2\cdot 0, -3+4\cdot 0, 5+3\cdot 0) =$

$= (1,-3,5)$

Příčka BC mezi přímkami q, p je nejkratší

BC ∥ u, tj. BC ∥ r, tj.

$BC \perp p \wedge BC \perp q$.

Vzdálenost $p, q = \|B-C\| =$

$= \|(5,1,-3) - (1,-3,5)\| =$

$= \|(4,4,-8)\| = (16+16+64)^{1/2} =$

$= (16\cdot 6)^{1/2} = \underline{\underline{4\sqrt{6}}}$